方幂和及其推广和式

◎黄嘉威 （暨南大学信息科技学院数学系，广东省广州市 510632）

【摘要】本文将讨论方幂和的组合数通项，以及其推广和式的差分算子通项. 过程将会用到待定系数法、帕斯卡矩阵的逆和差分运算的逆.

【关键词】方幂和; 帕斯卡矩阵; 差分算子

方幂和是形式简单却又有颇难度的问题，这类问题吸引了很多数学家去求解. 方法有裂项和、伯努利数、待定系数法、组合数等等. 以下讨论组合数的待定系数法.

如果多项式能够化成组合数，用一下朱世杰恒等式就可以求解.

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \sum_{k=1}^{n}(k^2-k)+(k) = \sum_{k=1}^{n} 2C_k^2 + C_k^1 = 2C_{n+1}^3 + C_{n+1}^2.$$

所以第一步是把多项式化成组合数，这里选取基$\{C_{k-1}^0, C_{k-1}^1, C_{k-1}^2, \cdots, C_{k-1}^m\}$把一个$m$次多项式表达成组合数的线性表示，而对于$m$次多项式$p(k)$，我们可以用待定系数法将$p(k)$表达成组合数的线性表示. 注意基的选取是$m+1$个线性无关的组合数.

$\deg p(k) = m$，$p(k) = \sum_{i=0}^{m} a_i C_{k-1}^i$ 代入 $k=1,2,\cdots,m+1$ 得到一个线性方程，其中系数矩阵就是帕斯卡矩阵，帕斯卡矩阵的逆很好求，就是原矩阵上面交错地加上负号.

$$\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_0^0 & 0 & \cdots & 0 \\ C_1^0 & C_1^1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_m^0 & C_m^1 & \cdots & C_m^m \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} p(1) \\ p(2) \\ \vdots \\ p(m+1) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} C_0^0 & 0 & \cdots & 0 \\ -C_1^0 & C_1^1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (-1)^m C_m^0 & (-1)^{m-1} C_m^1 & \cdots & C_m^m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p(1) \\ p(2) \\ \vdots \\ p(m+1) \end{pmatrix}$$

例 求$\sum_{k=1}^{n} k^2+k+1$.

$p(k) = k^2+k+1$，$m = \deg p(k) = 2$.

$$\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \sum_{k=1}^{n} p(k) = \sum_{k=1}^{n} 3C_{k-1}^0 + 4C_{k-1}^1 + 2C_{k-1}^2 = 3C_n^1 + 4C_n^2 + 2C_n^3.$$

还有一种和式是$\sum_{k=1}^{n} k^m q^k$，它在$q=1$时是方幂和，$q=0$时没什么好算.

以下讨论$q \neq 0,1$的情况. 为了方便理解，这里先给出结论和计算实例.

$$\sum_{k=1}^{n} p(k) q^{k-1} = f(n) q^n - f(0), \ f(n) = \frac{p(n)}{q-1} + \frac{1}{(q-1)^2} \sum_{k=1}^{m} \frac{(-1)^k q^{k-1}}{(q-1)^{k-1}} \Delta^k(p(n)).$$

其中差分算子Δ定义为$\Delta f(x) = f(x+1) - f(x) = E - I$.

位移算子E定义为$Ef(x) = f(x+1)$，恒等算子I定义为$If(x) = f(x)$.

例 求$\sum_{k=1}^{n} (2k+1) q^{k-1}$.

$\Delta(2n+1) = \Delta(2n) + \Delta(1) = 2.$

$$f(n) = \frac{2n+1}{q-1} - \frac{2}{(q-1)^2}, \ f(0) = \frac{1}{q-1} - \frac{2}{(q-1)^2} = \frac{q-3}{(q-1)^2}.$$

$$\sum_{k=1}^{n} (2k+1) q^{k-1} = \left[\frac{2n+1}{q-1} - \frac{2}{(q-1)^2}\right] q^n - \frac{q-3}{(q-1)^2}.$$

以下证明这个结论. 首先证明$p(k)$，$f(n)$都是m次多项式.

当$p(k)$为常数，也就是$\deg p(k) = 0$，我们知道这个和式就是等比数列求和，

$$\sum_{k=1}^{n} q^{k-1} = \frac{q^n - 1}{q-1} = f(n) q^n + C，其中 \deg f(n) = 0.$$

假设$\deg p(k) = m$时，有$\sum_{k=1}^{n} p(k) q^{k-1} = f(n) q^n + C$，$\deg f(n) = m$

两边对q求导，$p(k)$与q无关，$f(n)$，C与q有关，左边跟右边同时变成$m+1$次多项式.

$$\sum_{k=1}^{n} (k-1) p(k) q^{k-2} = \left[\frac{n}{q} f(n) + \frac{\partial}{\partial q} f(n)\right] q^n + \frac{\partial C}{\partial q}.$$

$$\sum_{k=0}^{n} p(k) q^{k-1} - p(0) q^{-1} = f(n) q^n + C \overset{n=0}{\Rightarrow} C = -f(0).$$

这样就求出C.

然后是解$f(n)$，对和式两边差分，得到只关于$p(n)$的算子表达式，问题就是求$qE - I$的逆.

$$\Delta \sum_{k=1}^{n} p(k) q^{k-1} = \Delta f(n) q^n \Rightarrow Ep(n) = (qE - I) f(n) \Rightarrow f(n) = (qE - I)^{-1} Ep(n).$$

由于$p(k)$是m次多项式，所以$p(k)$的$m+1$次差分一定为0，于是Δ的$m+1$次等于0.

$$(qE - I)^{-1} E = \frac{\Delta + I}{q(\Delta + I) - I} = \frac{\Delta + I}{q-1} \cdot \frac{1}{I - \frac{q}{1-q}\Delta} = \frac{\Delta + I}{q-1} \sum_{k=0}^{m} \left(\frac{q}{1-q}\right)^k \Delta^k = \frac{1}{q-1}\left[\sum_{k=0}^{m-1} \left(\frac{q}{1-q}\right)^k \Delta^{k+1} + \sum_{k=0}^{m} \left(\frac{q}{1-q}\right)^k \Delta^k\right] = \frac{1}{q-1}\left[\sum_{k=1}^{m} \left(\frac{q}{1-q}\right)^{k-1} \Delta^k + \sum_{k=1}^{m} \left(\frac{q}{1-q}\right)^k \Delta^k + I\right] = \frac{1}{q-1} I + \frac{1}{q-1} \sum_{k=1}^{m} \left(\frac{q}{1-q}\right)^{k-1} \left(1 + \frac{q}{1-q}\right) \Delta^k = \frac{1}{q-1} I + \frac{1}{(q-1)^2} \sum_{k=1}^{m} \frac{(-1)^k q^{k-1}}{(q-1)^{k-1}} \Delta^k.$$

最后把算子作用在$p(n)$，结论得证.

事实上$p(n+1) = qf(n+1) - f(n)$是一类非齐次一阶常系数线性差分方程，若$p(k)$不是一个多项式，就可能没有以上结论. 解这一类差分方程还可以考虑待定系数法，可是如果系数矩阵很难求逆，矩阵稍微大一点就会造成很大的计算量.

【参考文献】

韩士安，林磊. 近世代数[M]. 北京: 科学出版社，2009.